文章编号:1007-2780(2016)05-0477-07

基于图像局部方向特性的自适应全变分去噪模型

唐 玲*,陈明举
(四川理工学院 自动化与电子信息学院,四川 自贡 643000)

摘要:针对全变分模型(total variation,TV)以图像的梯度信息作为去噪的尺度参数,未考虑图像局部纹理的方向性的缺点,提出了一种基于图像局部方向特性的自适应全变分去噪模型(Adaptive directional total variation,ADTV),并推导出该模型的迭代数值求解过程。在该模型中,首先,计算出图像局部方向的角度矩阵。然后,构造与图像纹理方向一致的椭圆区域代替 TV 模型的圆形区域。最后,通过优化最小化算法迭代求解以获得去噪后图像。通过对比实验证明,本文提出的模型取得了更高的峰值信噪比,去噪过程中更好地增强了图像的细节信息。

关 键 词:图像去噪;全变分;优化最小化算法;图像局部方向
中图分类号:TN911.73 **文献标识码**:A **doi**:10.3788/YJYXS20163105.0477

Adaptive directional total variation denoising model based on image local direction

TANG Ling*, CHEN Ming-ju

(*College of Information Engineering, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong* 643000, *China*)

Abstract: In order to overcome the disadvantages that total variation model based on the image gradient information can't consider image's local direction and remove noise effectively, an adaptive directional total variation model based on image's local direction is proposed, and the iterative procedure of model is deduced. First, the image local direction is calculated in this new model. Second, an ellipse coinciding with the dominant direction of the local image is used to replace the unit ball in the total variation model. Finally, the denoised image is obtained by using iteration to optimize the minimum total variation. The comparing experimental results show that the proposed model can get higher peak signal to noise ratio and enhance the image details, and it has good performance in image denoising.

Key words: image denoising; total variation; optimal minimization algorithm; image local direction

收稿日期:2015-07-14;**修订日期**:2015-07-23.

基金项目:人工智能四川省重点实验室开放基金项目(No. 2012RYY08,No. 2013RYY02);四川省教育厅科研项目(No. 13ZB0138,No. 14ZB0211);四川理工学院校级科研基金项目(No. 2012KY13)
Supported by Artificial Intelligence Key Laboratory of Sichuan Province(No. 2013RYY02); Projects of Sichuan Provincial Department of Education(No. 13ZB0138,No. 14ZB0211)

* 通信联系人,E-mail:fashion-kitty@163.com

1 引 言

当图像受到噪声的干扰，由于噪声是随机变化，自相关性弱，造成噪声图像相邻灰度值随机变化较大，噪声图像的全变分比较大。而未受干扰的噪声图像相邻像素之间存在较强的相关性，其全变分比较小。因此，利用最小化图像的全变分可以去除去图像的噪声，达到平滑图像的目的。由于全变分只对噪音敏感，与传统的图像滤波相比，全变分在去除噪声的时候同时能区分图像边缘和噪音的，去除噪声的同时保留一定的图像边缘信息。

Rudin，Osher 与 Fatemi 第一次提出以梯度信息作为图像平滑性的度量实现图像去噪与修复的全变分去噪模型(ROF 模型)[1]，并通过迭代方程实现对该模型的求解。随后，学者们在 ROF 模型的基础上不断完善与改进，Chambolle 与 Beck 等人引入正弦函数并重构正则化项加快了迭代实现图像平滑的时间[2-3]。为了克服 ROF 模型产生阶梯效应的缺点，很多学者提出了相应的改进方法[4]，如 You 与 Kaveh 等人提出的以四阶梯度的全变分模型[5-6]；Bing 等人提出了基于图像梯度信息的一种基于 L^p 范数的广义的 TV 自适应全变分图像去噪模型[7-9]以及 Gilboa 等人的复扩散去噪模型[10-12]。这些模型在去噪方面体现了一定的优越性，但这些模型都是以梯度作为迭代求解的参量，梯度虽然能体现图像局部纹理强弱，未能体现纹理的方向性，因此，以上模型存在不足，有待改进。

因此，本文针对梯度体现二维图像空间的圆形区域灰度值变化的强弱，未体现图像局部信息的方向性的缺点，提出一种基于图像局部纹理结构的自适应全变分去噪模型(adaptive directional total variation denoising model，ADTV)。该模型先获得图像局部纹理的方向信息，再构造一个长轴与纹理的方向相同的椭圆区域，建立以椭圆区域为基础的全变分模型，并推导此模型迭代求解过程，通过实验证明本模型能更好地保持图像的纹理结构，获得很好的去噪效果。

2 TV 去噪模型

令 f 为原始的清晰图像，y 为被噪声污染的图像，n 为干扰噪声，即 $y=f+n$，Rudin 等人提出的基于 L^1 范数全变分模型 ROF 去噪模型用极小化问题表示为：

$$f^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \| y-f \|_2^2 + \lambda TV(f) , \tag{1}$$

式中：f^* 为原始图像的估计值，该模型的第一项称为正则项，保证去噪后的图像具有一定的平滑性，第二项称为全变分项，确保去噪后的图像能够尽可能逼近原始图像。

全变分项可进一步表示为：

$$TV(f)=\sum_{i,j} \| \Delta f(i,j) \|_2^2 = \sum_{i,j} \sup_{v(i,j)\in B_2} \langle \Delta f, v \rangle , \tag{2}$$

式中，$v(i,j)=[v_1(i,j),v_2(i,j)]^{\mathrm{T}}$，$B_2$ 表示有界变差(BV)函数空间的单位圆形区域。$\Delta f(i,j)$ 表示水平和垂直方向上的一阶导数，其表达式为：

$$\Delta f(i,j)=\begin{bmatrix} \Delta_1 f(i,j) \\ \Delta_2 f(i,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(i,j)-f(i-1,j) \\ f(i,j)-f(i,j-1) \end{bmatrix} . \tag{3}$$

ROF 模型利用能量泛函的凸性确保了模型能够被快速迭代求解，并在去噪的同时能够较好地保持图像的细节信息。但该模型的不足之处在于，迭代求解时，仅考虑梯度信息，即以 B_2 单位圆形区域灰度值变化强度作为能量泛函的对象，未体现图像局部纹理的方向性，以致该模型在迭代过程中未利用图像的方向信息，如果在迭代过程中将图像局部方向信息考虑进去，无疑将提高去噪性能。

3 自适应图像局部纹理方向的 TV 模型

如果将公式(2)将 TV 项的最小上界 sup 的单位圆形区域 B_2 改为与图像局部纹理方向平行的椭圆形区域 $B_{\alpha,\theta}$，此时 TV 项不仅考虑到图像的梯度信息而且考虑到图像局部纹理的方向性。$B_{\alpha,\theta}$ 表示的短轴为 1，长轴为 α，长轴与水平方向夹角为 θ，如图 1 所示。当图像的边界与椭圆长轴重合时，即 θ 为图像的纹理的角度相同时，将获得最好的去噪性能。

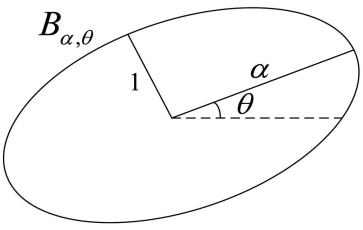


图 1　自适应方向 TV 模型中椭圆形区域

Fig. 1　Ellipse $B_{\alpha,\theta}$ used to define the directional TV norm

此时，可以得到带有方向特性的全变分模型，用极小化问题表示为：

$$f^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \| y-f \|_2^2 + \lambda TV_{\alpha,\theta}(f), \quad (4)$$

其中：TV 项为：

$$TV_{\alpha,\theta}(f) = \sup_{v(i,j)\in B_{\alpha,\theta}} \langle \Delta f, v \rangle . \quad (5)$$

接下来推导式(4)的迭代求解，这里引入旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta$ 与尺度矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$，如式(6)所示。

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Lambda}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

此时，有界变差函数空间的圆形区域 B_2 与椭圆形区域 $B_{\alpha,\theta}$ 的关系可以表示为：$B_{\alpha,\theta} = \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{\Lambda}_\alpha B_2$。$TV_{\alpha,\theta}(f)$ 可进一步表示成：

$$TV_{\alpha,\theta}(f) = \sup_{v(i,j)\in R_\theta \Lambda_\alpha B_2} \langle \Delta f, v \rangle = \sup_{v(i,j)\in B_2} \langle \Delta f, R_\theta \Lambda_\alpha v \rangle . \quad (7)$$

式(7)将 TV 模型的求解由椭圆形区域转换到单位圆进行，求式(4)的全变分最小值，即求 $y-\lambda\Delta^{\mathrm{T}} R_\theta \Lambda_\alpha v^*$ 的极小值，可由式(8)极小化求得。其中 λ 为常数系数，v^* 为图像有界变差函数空间的值。

$$v^* = \operatorname*{argmin}_{v(i,j)\in B_2} \| y-\lambda\Delta^{\mathrm{T}} R_\theta \Lambda_\alpha v \|_2^2 . \quad (8)$$

令 $A = \lambda\Delta^{\mathrm{T}} R_\theta \Lambda_\alpha$，上式极小化问题可进一步简化为：

$$C(v) = \| y-Av \|_2^2 . \quad (9)$$

令 v^k 为第 k 次迭代后的值，$C(v)$ 随着迭代进行逐渐减小，即 $C(v^{k+1}) \leqslant C(v^k)$，式(9)可以通过最优最小化算法迭代[13]求解可得：

$$C^k(v) = \left\| \left[v^{(k)} + \frac{1}{2\alpha^2} A^{\mathrm{T}} (y-Av^{(k)}) \right] - v \right\|_2^2 . \quad (10)$$

$C^k(v)$ 为第 k 次迭代后的值，随着迭代的进行 $C(v)$ 不断减小，说明 $\left[v^{(k)} + \frac{1}{2\alpha^2} A^{\mathrm{T}} (y-Av^{(k)}) \right]$ 越来越接近 v，所以第 k 次迭代后 v 的估计值 v^* 可表示为[14]：

$$v^*(i,j) = v^{(k)} + \frac{1}{2\alpha^2} A^{\mathrm{T}} (y-Av^{(k)}). \quad (11)$$

根据上述推导，纹理方向特性 TV 模型实现步骤：

(1)确定常数参数 α、λ、迭代次数 maxiter，待去噪图像 y；

(2)计算待去噪的图像的梯度，确定图像纹理的局部方向角度矩阵 θ；

(3)由 α、θ 分别计算 $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$、$\boldsymbol{R}_\theta$，并进一步计算 A；

(4)进行 maxiter 次迭代运算，每次迭代计算新的 $v^*(i,j)$；

(5)将第 maxiter 次迭代的 $v^*(i,j)$，带入得到去噪后的图像 $f^* = y-Av^*$；

4　试验结果及分析

为了证明本文基于图像局部方向特性 TV 模型的有效性，选取含 0、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$ 方向纹理信息的

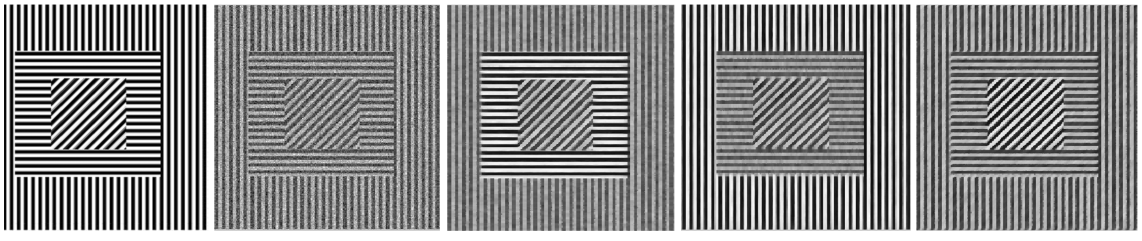


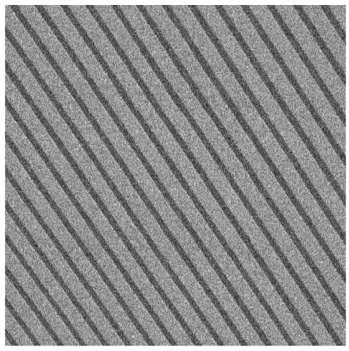
图 2　θ 不同值时对 striola 图像去噪结果

Fig. 2　Image striola denoised by different θ

“striola”图像进行去噪实验。实验中，TV 模型去噪中椭圆 $B_{\alpha,\theta}$的长轴 $\alpha=5$，分别固定 $\theta=0$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$ 实验以观察不同角度的椭圆对不同边界的影响，实验结果如图 2 所示。从图中可以看出当图像纹理方向与 $B_{\alpha,\theta}$的角度 θ 一致时，去噪与性能最优。如图(c)采用角度 $\theta=0$ 进行 TV 去噪，图像水平方向的纹理获得最好的去噪性能，垂直、斜方向的纹理去噪性能较差。

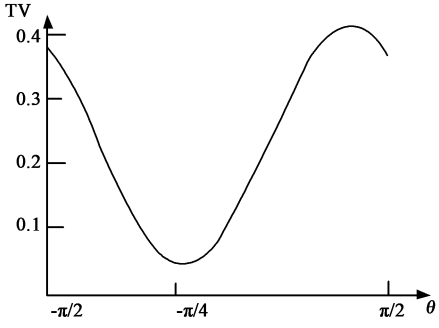
实际中对纹理的方向的估计不是十分准确，存在一定的误差，因此，$B_{\alpha,\theta}$的角度 θ 的轻微变化如果引起全变分项有较强的变化，去噪性能将急剧下降，本文模型将不再适用。接下来对角度 θ 的估计不准确引起全变分项变化进行实验。选择纹理与水平存 $-\pi/4$ 角的条形图像，如图 3(a)所示，θ 取 $-\pi/2\sim\pi/2$ 计算出全变分项的值，以 θ 为横坐标，全变分项为纵坐标，画出曲线图如图 3(b)所示。从图中可以看出 $\theta=-\pi/4$ 时，全变分项最小，而在此点曲线较平滑，斜率较小，从而说明 θ 值适当波动而引起全变分项的波动较小，因此本模型适合在实际中应用。

为了进一步证明本文基于图像局部纹理方向特性的全变分模型(ADTV)具有更好的去噪性能，选取不同特性的纹理图片与 ROF 模型进行大量对比实验。图 4 给出“striola”图像通过 ROF 模型



(a) $-\pi/4$ 方向纹理图像

(a) Texture image with 0.25 π direction



(b)图(a)全变分项与 θ 的关系曲线

(b) TV term of image (a) as θ varies

图 3 θ 变化引起全变分项变化

Fig. 3 TV term with different θ

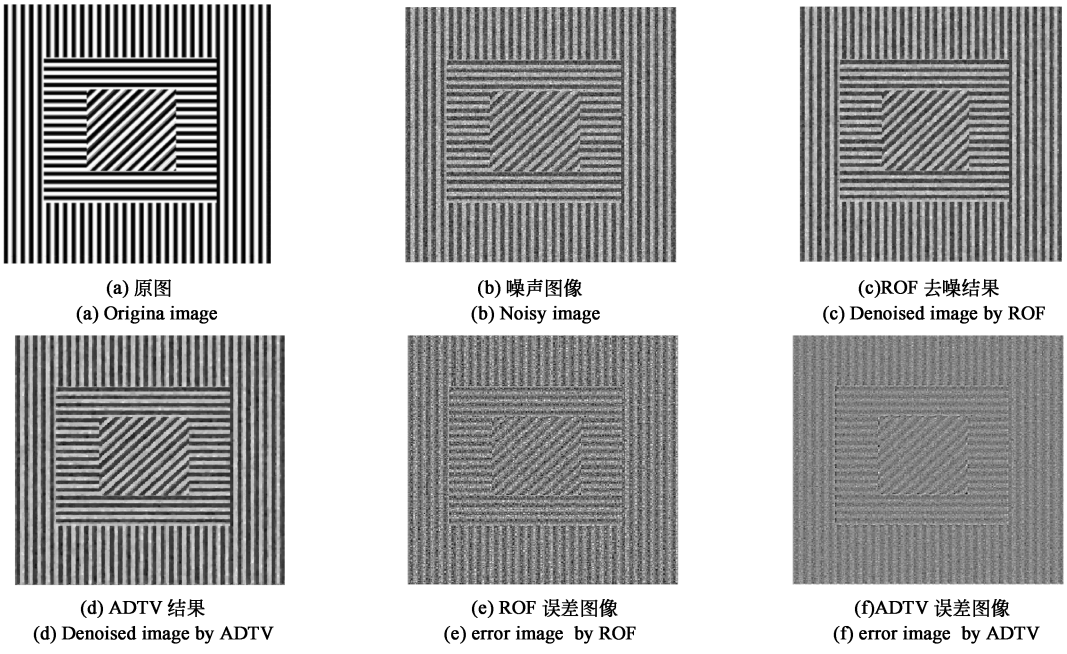
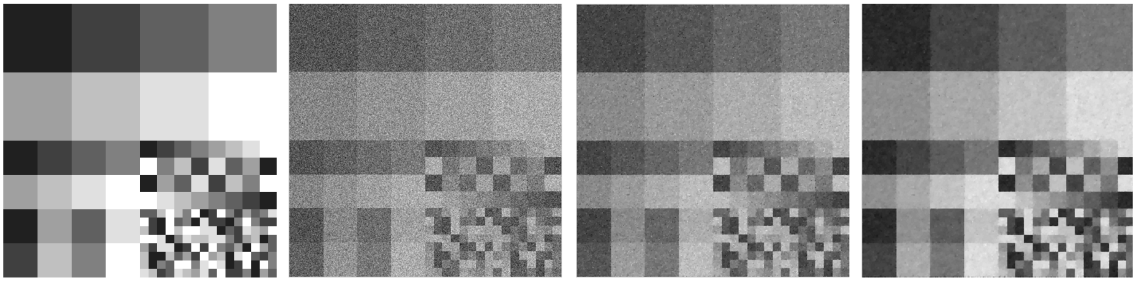


图 4 两种模型对 striola 图像去噪结果

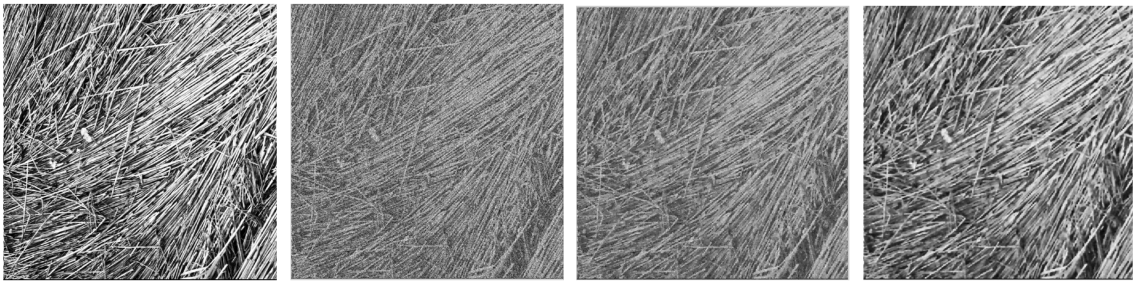
Fig. 4 Striola image denoised by different models



(a) 原图 (a) Origina image　(b) 噪声图像 (b) Noisy image　(c) ROF 去噪结果 (c) Denoised image by ROF　(d) DTV 结果 (d) Denoised image by ADTV

图 5　两种模型对 texmos 图像去噪结果

Fig. 5　Texmos image denoised by different models



(a) 原图 (a) Origina image　(b) 噪声图像 (b) Noisy image　(c) ROF 去噪结果 (c) Denoised image by ROF　(d) DTV 结果 (d) Denoised image by ADTV

图 6　两种模型对 straw 图像去噪结果

Fig. 6　Straw image denoised by different models

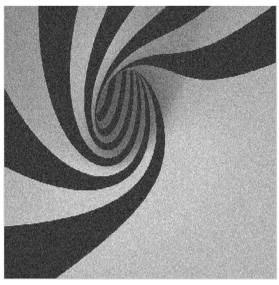
与 ADTV 模型去噪对比实验，并计算出去噪后图像与原始图像的误差图像。从图中可以明显地看出 ADTV 模型去噪的效果明显优于 ROF 模型，去噪后的图像纹理信息得到更好地保持，从误差图像可以看出 ROF 误差图像灰度值较大，且波动较大，而 ADTV 误差图像灰度值较小，图像偏暗，波动较小。图 5、图 6 选取具有代表性平滑图像 texmos 图片与强纹理图片 straw 进行对比实验，可以看出 ADTV 模型去噪更充分，图像的纹理信息明显得到增强。

在客观评价方面，选取不同的图像加入不同强度的噪声进行实验，峰值信噪比（PSNR）作为客观评价指标。实验数据如表 1 所示，从表中可以看出 ADTV 模型的 PSNR 明显高于 ROF 模型。表中前 3 幅图像 circle、structures、texmos 纹理性较弱，图像存在大面积平滑区域，其 ADTV 模型去噪获得的峰值信噪比高于 ROF 模型的峰值信噪比不足 1 dB，straw、bark、baboo 后 3 幅图像纹理性较强，因此更能体现 ADTV 模型的优越性，其峰值信噪比高于 ROF 模型达到 2 dB 左右。表 1 中部分图像 ADTV 模型去噪前后对比效果如图 7、8 所示。

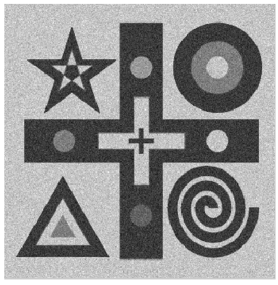
表 1　不同图片不同模型消噪 PSNR 比较

Tab. 1　PSNR of different denoised images with different models (dB)

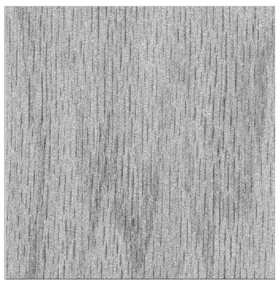
不同去噪模型	不同图片的 PSNR					
	circle	structures	texmos	straw	bark	striola
噪声图像	14.562 4	17.365 2	15.784 3	13.256 8	14.865 1	16.254 7
ROF	18.781 6	21.845 1	20.457 8	18.245 7	19.754 3	20.147 6
ADTV	19.346 2	22.153 7	21.021 3	20.348 5	21.452 7	22.389 4



(a) Circle 噪声图像
(a) Noisy circle image



(b) Texmos 噪声图像
(b) Noisy temos image



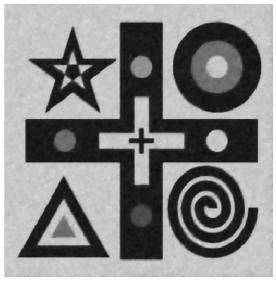
(c) Bark 噪声图像
(c) Noisy bark image

图 7 部分噪声图像

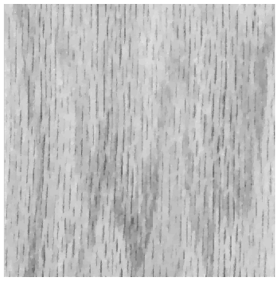
Fig. 7 some noise images



(a) circle 去噪结果
(a) Denoised circle image



(b) Texmos 去噪结果
(b) Denoised texmos image



(c) Bark 去噪结果
(c) Denoised bark image

图 8 部分噪声图像 ADTV 去噪结果

Fig. 8 Some image denoised by ADTV model

综上,基于方向特性的自适应全变分模型在消噪的同时更好的保留图像的纹理信息,并具有更高的峰值信噪比,当图像纹理越强时,去噪性能越优。

5 结 论

本文针对 TV 去噪模型中梯度信息无法体现图像纹理方向性的缺点,在图像的有界变差函数空间中引入与图像局部纹理同方向的椭圆区域,建立一种基于图像局部方向的自适应 TV 去噪模型,并推导此模型的迭代求解过程。在试验中,通过对经典的 TV 去噪 ROF 模型进行对比分析,证明基于图像局部纹理方向的 TV 模型在去噪过程中更好地保留图像的边界信息,峰值信噪比更高,当图像纹理方向性越明显时,去噪优越性越明显。另外,本文是对 ROF 模型的基础上实现基于图像纹理方向性的自适应,ROF 模型是基于 L^1 范数的低阶 TV 模型,而如何实现对采用 L^p 范数与高阶梯度的 TV 模型实现图像局部方向性的自适应,其数值迭代求解相对较复杂,将是下一步研究的重点。

参 考 文 献:

[1] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(14): 259-268.

[2] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and applications [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(2): 89-97.

[3] BECK A, TEBOULLE M. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(11): 2419-2434.

[4] 赵文达，赵建，韩希珍，等. 基于变分偏微分方程的红外图像增强算法研究[J]. 液晶与显示，2014，29(2)：281-285.
ZHAO W D, ZHAO J, HAN X Z, *et al*. Infrared image enhancement based on variational partial differential equations [J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2014, 29(2): 281-285. (in Chinese)

[5] LYSAKER M, LUNDERVOLD A, TAI X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(12): 1579-1590.

[6] LIU X W, HUANG L H, GUO Z Y. Adaptive fourth-order partial differential equation filter for image denoising [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2011, 24(8): 1282-1288.

[7] SONG B. *Topics in variational PDE image segmentation, inpainting and denoising* [D]. Los Angeles, USA: University of California, 2003.

[8] 张红英，彭启琮. 全变分自适应图像去噪模型[J]. 光电工程，2006，33(3)：50-53.
ZHANG H Y, PENG Q C. Adaptive image denoising model based on total variation [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2006, 33(3): 50-53. (in Chinese)

[9] 陈明举，杨平先，王晶. 基于正则化与保真项全变分自适应图像去噪模型[J]. 重庆邮电大学学报：自然科学版，2011，23(5)：621-625.
CHEN M J, YANG P X, WANG J. An adaptive total variational denoising model based on LP norm and fidelity term [J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications: Natural Science Edition*, 2011, 23(5): 621-625. (in Chinese)

[10] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Image enhancement and denoising by complex diffusion processes [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(8): 1020-1036.

[11] FU S, ZHANG C. Adaptive non-convex total variation regularisation for image restoration [J]. *Electronics Letters*, 2010, 46(13): 907-908.

[12] 陈明举，杨平先，唐玲. 一种自适应非线性复扩散图像去噪算法[J]. 光电工程，2012，39(12)：91-96.
CHEN M J, YANG P X, TANG L. An adaptive complex diffusion processes for image denoising [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2012, 39(12): 91-96. (in Chinese)

[13] FIGUEIREDO M A T, BIOUCAS-DIAS J M, NOWAK R D. Majorization-minimization algorithms for wavelet-based image restoration [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(12): 2980-2991.

[14] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计[M]. 北京：科学出版社，2009：261-262.
MA C F. *Optimization Method and Matlab* [M]. Beijing: Science Press, 2009: 261-262. (in Chinese)

作者简介：唐玲(1981－)，女，重庆铜梁人，硕士，讲师，主要从事通信信息处理方面的研究。E-mail: fashion-kitty@163.com