

文章编号: 1007-2780(2012)04-0425-09

纳米结构表面向列相液晶的聚合物锚定效应

周 璇^{1,2}, 宋静静³, 张志东^{3*}

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033, E-mail: zhouxuan198536@163.com;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100049; 3. 河北工业大学 理学院, 天津 300401)

摘 要: 提出了纳米结构聚合物表面的一个简化模型: 由具有交替的沿面和垂面锚定的一维周期性条纹表面表征。利用 Alexe-Ionescu 等提出的扩展各向异性表面能形式, 研究了向列相和取向层聚合物之间的锚定以及聚合物和基板表面之间的锚定向列相液晶表面锚定的影响。在理论处理中, 假设两不同锚定区域的锚定强度相等。结果表明: 聚合物和基板表面之间的锚定会影响向列相的指向矢分布, 降低松弛距离以及系统的总自由能。

关 键 词: 纳米结构表面; 表面锚定; 指向矢分布; 预倾角

中图分类号: O753⁺.2

文献标识码: A

DOI: 10.3788/YJYXS20122704.0425

Effects of Polymer Anchoring on Nematic Liquid Crystals at Nano-Structured Surfaces

ZHOU Xuan^{1,2}, SONG Jing-jing³, ZHANG Zhi-dong^{3*}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences,

Changchun 130033, China, E-mail: zhouxuan198536@163.com;

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. Department of Physics, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: A simplified model of the nano-structured polymeric surface was proposed, characterized by a one-dimensional periodic stripe patterned surface with alternate planar and homeotropic anchoring. This paper investigated the effect of both the coupling of nematic liquid crystals with alignment layer polymers and the coupling of the polymers with the substrate surface, on the anchoring of nematic liquid crystals at such a surface, using the extended anisotropic surface energy form proposed by Alexe-Ionescu *et al.* In our theoretical treatment, the equal anchoring strength of the two anchoring regions was assumed. The results show that the coupling of the polymer with the surface will affect the director field of the nematic, and reduce the relaxation distance as well as the total free energy of the system.

Key words: nano-structured surface; surface anchoring; director distribution; pretilt angle

1 引 言

在液晶中, 向列相的表面效应已被广泛研

究^[1]。界面附近向列相的平移对称以及转动对称性被破坏^[2]。在没有外场时, 由于表面层的存在, 向列相液晶的取向完全由表面力决定^[3]。当表面

收稿日期: 2012-03-13; 修订日期: 2012-04-12

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60736042); 河北省自然科学基金(No. A201000004); 河北省重点学科资助项目

作者简介: 周璇(1985—), 女, 河北石家庄人, 博士研究生, 从事液晶物理方面的学习和研究。

* 通讯联系人, E-mail: zhidong_zhang@yahoo.cn

层为有序介质(例如聚合物)时,将产生特殊的效应,因为除了物化相互作用,还需要考虑空间相互作用^[4-7]。

近来,郭海成等人提出的纳米结构取向层能够实现预倾角的连续控制^[8-10]。该取向层表面为由沿面(H)和垂面(V)取向材料纳米畴组成的多相异质取向层。纳米畴周期很小时,液晶分子将在距离取向层很短的距离内形成均匀的预倾角,该距离定义为松弛距离。该取向表面已被证实具有较好的锚定能以及热稳定性。由于可以实现大预倾角,该表面可用于许多快速响应以及双稳装置^[10-11]。

利用 Rapini-Papoular (RP) 表面锚定能^[12], 郭海成等基于一维纳米结构聚合物表面模型,对向列相液晶的指向矢量场进行了数值计算^[9-10]。结果表明:预倾角取决于 H 畴和 V 畴的相对面积比、相对锚定强度以及液晶的弹性常数。另外,松弛距离由纳米畴的周期决定。

Alexe-Ionescu 等人^[13]基于平行排列盒,研究了由 H 取向材料和 V 取向材料混合形成的聚合物取向层的表面锚定。他们提出了扩展的表面能形式,其中包含向列相和取向层聚合物之间的锚定以及聚合物和基板表面之间的锚定。研究表明:通过控制 H 和 V 取向材料的锚定可以控制等价锚定能。然而他们所研究的平行盒表面与郭海成提出的纳米结构表面模型不同;并且,他们所采用的在单一层中制造 H 和 V 取向材料的

均匀同质混合物的方法在实验上不能实现预倾角的连续控制^[11]。

郭海成等提出的一维纳米结构模型引起了极大的关注^[14-18]。Atherton 等人^[14]研究了具有这种表面结构的向列相液晶的取向转变。为了得到关于指向矢分布的解析解,他们提出了关于指向矢分布的傅里叶形式解,并且假设两锚定的锚定强度相等。他们的解析结果可以解释郭海成^[9-10]的数值结果,但是郭海成和 Atherton 等都没有考虑聚合物和基板表面之间的锚定。

本文研究纳米结构聚合物取向表面向列相的锚定效应。在理论处理中,通过假设两锚定区域锚定强度相等,得到了关于指向矢分布的解析解,进而分析了聚合物和基板之间锚定向列相的影响。

2 模 型

考虑由规则的 H 畴和 V 畴组成的纳米结构表面,两取向畴具有相同的方位 φ 。建立一个简化模型,由沿 x 方向周期为 λ 的周期性条纹表面表征(见图 1),V 畴宽 $a\lambda$ ($0 < a < 1$)。令 z 轴垂直于基板, y 轴沿条纹。条纹 $0 \leq x < a\lambda$ 上分子垂面锚定, $a\lambda \leq x < \lambda$ 上分子沿面锚定。假设指向矢限制在 $x-z$ 平面内,那么

$$\mathbf{n} = (\cos\theta, 0, \sin\theta) \quad (1)$$

由于沿 y 方向的平移不变性, $\theta = \theta(x, z)$ 。

指向矢最终构型使得总自由能(包含体能和表面能)最小。体弹性能为:

$$f_b = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + K_3 (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2] \quad (2)$$

其中 K_1, K_2, K_3 分别为展曲, 扭曲, 弯曲弹性常数。这里我们忽略了表面弹性项 $K_s \equiv K_2 + K_{24}$, 因为当指向矢被限制在单一平面时 K_s 对自由能没有贡献。另外一个表面项 K_{13} ^[19] 在这里也没有考虑。

根据 Alexe-Ionescu 等人提出的扩展表面能形式^[13], 样本 H 畴的扩展各向异性表面能为:

$$f_{sH} = \frac{1}{2} \alpha_H \sin(\theta^0 - \theta_p)^2 + \frac{1}{2} \beta_H \sin(\theta_p - \theta_e)^2 \quad (3a)$$

V 畴的扩展各向异性表面能为:

$$f_{sV} = \frac{1}{2} \alpha_V \sin(\theta^0 - \theta_p)^2 + \frac{1}{2} \beta_V \sin(\theta_p - \theta_e)^2 \quad (3b)$$

其中 θ_p 和 θ_e 分别为聚合物材料的取向和易取向方向; θ^0 为表面处液晶指向矢方向。 β_H, β_V 分别与作用在 H 和 V 取向材料上的弹性回复力矩有关; α_H, α_V 分别代表向列分子沿 H 和 V 取向材料取向的能力。

为了得到总自由能,通过纳米畴的周期 λ 对坐标进行约化,即 $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda}, \tilde{z} = \frac{z}{\lambda}$ 。对于多数向列相 $K_2 < K_1 \leq K_3$ ^[20-21], 因此我们假设 $K_1 = K_3 = K$, 那么体自由能密度为:

$$f_b/K = \frac{1}{2} [(\theta_{\tilde{x}})^2 + (\theta_{\tilde{z}})^2] / \lambda^2 \quad (4)$$

其中 $\theta_{\tilde{x}} = \partial\theta/\partial\tilde{x}, \theta_{\tilde{z}} = \partial\theta/\partial\tilde{z}$ 。欧拉方程为:

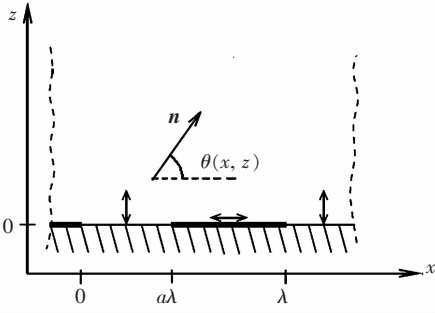


图1 一维模型示意图. 表面周期为 λ , V畴宽 $a\lambda$ (细线), H畴宽 $(1-a)\lambda$ (粗线). 指向矢 \mathbf{n} 限制在 xz 平面.

Fig. 1 Schematic picture of the model. A periodically patterned surface with period λ . The V domain width $a\lambda$ (thin line), and H domain width $(1-a)\lambda$ (thick line). The director \mathbf{n} is confined to the xz plane.

$$\theta_{\tilde{x}\tilde{x}} + \theta_{\tilde{z}\tilde{z}} = 0 \quad (5)$$

它有如下傅里叶形式解,

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{z}) = \theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n\pi\tilde{z}) \times [p_n \sin(2n\pi\tilde{x}) + q_n \cos(2n\pi\tilde{x})] \quad (6)$$

其中, 系数 θ_0 , p_n 和 q_n 可以通过总自由能最小化得到, θ_0 为预倾角. 将式(6)代入式(4)并对 \tilde{x} 和 \tilde{z} 积分得到单位周期的体自由能为:

$$F_b/k = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(p_n^2 + q_n^2) \quad (7)$$

当 $(\theta_0 - \theta_p)$ 和 $(\theta_p - \theta_e)$ 很小时, (3. a)和(3. b)可以线性化, 进而得到单位周期的表面能:

$$F_s/K = \int_0^a \left[\frac{\lambda}{2L_{\alpha V}} [\theta^p(\tilde{x}) - \theta_p(\tilde{x})]^2 + \frac{\lambda}{2L_{\beta V}} [\theta_p(\tilde{x}) - \theta_e(\tilde{x})]^2 \right] d\tilde{x} + \int_a^1 \left[\frac{\lambda}{2L_{\alpha H}} [\theta^p(\tilde{x}) - \theta_p(\tilde{x})]^2 + \frac{\lambda}{2L_{\beta H}} [\theta_p(\tilde{x}) - \theta_e(\tilde{x})]^2 \right] d\tilde{x} \quad (8)$$

其中 $L_{\alpha V} = K/\alpha_V$, $L_{\beta V} = K/\beta_V$, $L_{\alpha H} = K/\alpha_H$, $L_{\beta H} = K/\beta_H$, 它们具有长度的量纲, 可定义为两不同畴区推广的外推长度.

3 结 果

根据上面提到的纳米结构表面模型(图1), 可以得到:

$$\theta_e(\tilde{x}) = \theta_e(\tilde{x} + L) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq \tilde{x} < a \\ 0 & a \leq \tilde{x} < 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中 L 为任意整数. 式(9)给出的周期性函数 $\theta_e(x)$ 可近似写为傅里叶形式, 即

$$\theta_e(\tilde{x}) = \frac{\pi}{2}a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \sin(2n\pi\tilde{x}) + \frac{\sin(2n\pi a)}{4n} \cos(2n\pi\tilde{x}) \right] \quad (10)$$

由于 θ_p 和 θ 也为 x 方向的周期性函数, 我们可以假设:

$$\theta_p(\tilde{x}) = \theta_0' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [p_n' \sin(2n\pi\tilde{x}) + q_n' \cos(2n\pi\tilde{x})] \quad (11)$$

$$\theta^p(\tilde{x}) = \theta(\tilde{x}, 0) = \theta_0 +$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \sin(2n\pi\tilde{x}) + q_n \cos(2n\pi\tilde{x})] \quad (12)$$

将式(10)~(12)代入式(8), 积分后与式(7)结合, 我们得到单位周期的总自由能 $F(\theta_0, \theta_0', p_n, q_n, p_n', q_n'; n=1, 2, 3, \dots)$.

系数 $\theta_0, \theta_0', q_n, p_n$ 和 p_n', q_n' 通过 F 最小化得到, 即 $\frac{\partial F}{\partial \theta_0} = \frac{\partial F}{\partial \theta_0'} = 0, \frac{\partial F}{\partial p_n} = \frac{\partial F}{\partial q_n} = \frac{\partial F}{\partial p_n'} = \frac{\partial F}{\partial q_n'} = 0$.

上述关系构成一非齐次线性方程组, 写成如下矩阵矢量形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (13)$$

其中矩阵 \mathbf{A} 和矢量 \mathbf{X}, \mathbf{B} 可表示为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,4m-1} & A_{1,4m} & A_{1,4m+1} & A_{1,4m+2} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,4m-1} & A_{2,4m} & A_{2,4m+1} & A_{2,4m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{4n-1,1} & A_{4n-1,2} & \cdots & A_{4n-1,4m-1} & A_{4n-1,4m} & A_{4n-1,4m+1} & A_{4n-1,4m+2} & \cdots \\ A_{4n,1} & A_{4n,2} & \cdots & A_{4n,4m-1} & A_{4n,4m} & A_{4n,4m+1} & A_{4n,4m+2} & \cdots \\ A_{4n+1,1} & A_{4n+1,2} & \cdots & A_{4n+1,4m-1} & A_{4n+1,4m} & A_{4n+1,4m+1} & A_{4n+1,4m+2} & \cdots \\ A_{4n+2,1} & A_{4n+2,2} & \cdots & A_{4n+2,4m-1} & A_{4n+2,4m} & A_{4n+2,4m+1} & A_{4n+2,4m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

$$\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_{4m-1} \quad X_{4m} \quad X_{4m+1} \quad X_{4m+2} \quad \cdots]^T \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

$$B = [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_{4n-1} \quad B_{4n} \quad B_{4n+1} \quad B_{4n+2} \quad \cdots]^T \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad (16)$$

附录 A 给出了 A, X 和 B 的各矩阵元素的具体表达式。

附录 A 中各矩阵元素的表达式表明: 系数 $\theta_0, \theta'_0, q_n, p_n$ 和 p'_n, q'_n 由参数 a 和 $L_{aH}, L_{\beta H}, L_{aV}, L_{\beta V}$ ($\alpha_H, \beta_H, \alpha_V, \beta_V$) 决定。式(6)给出模型预倾角为 θ_0 , 这意味着除了 H 畴和 V 畴之间的面积比以及向列相和聚合物之间的锚定 (a, α_H, α_V) (已被郭海成等人在理论和实验上证实^[8-10]), 聚合物和表面之间的锚定 (β_H, β_V) 也对预倾角有贡献。这里不存在弹性常数的贡献, 是因为在计算中我们假设 $K_1 = K_3 = K$ 。

为了进一步分析聚合物锚定的效应, 依据 Atherton^[14] 等人的处理方法, 假设 $L_{aH} = L_{aV} = L_a, L_{\beta H} = L_{\beta V} = L_\beta$, 即, $\alpha_H = \alpha_V = \alpha, \beta_H = \beta_V = \beta$, 可将式(13)进行简化, 附录 B 给出了详细简化过程。由(B. 7)~(B. 9)式可以得出各系数的解析表达式如下:

$$\theta_0 = \theta'_0 = \frac{\pi a}{2} \quad (17)$$

$$p_n = \frac{1}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \quad (18)$$

$$q_n = \frac{1}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \frac{\sin(2n\pi a)}{4n} \quad (19)$$

$$p'_n = \frac{1 + 2n\pi L_a/\lambda}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \quad (20)$$

$$q'_n = \frac{1 + 2n\pi L_a/\lambda}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \frac{\sin(2n\pi a)}{4n} \quad (21)$$

其中 $L_e = L_a + L_\beta$, 定义 $L_e = K/\omega_e$, 结合 L_a 和 L_β 的定义, 即 $L_a = K/\alpha, L_\beta = K/\beta$, 我们得到:

$$\frac{1}{\omega_e} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad (22)$$

将式(18)、(19)与 Atherton^[14] 给出的结果对比, 即

$$p_n = \frac{1}{1 + 2n\pi L_a/\lambda} \frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \quad (23)$$

$$q_n = \frac{1}{1 + 2n\pi L_a/\lambda} \frac{\sin(2n\pi a)}{4n} \quad (24)$$

考虑聚合物和基板表面之间的锚定, 我们得到与 Alexe-Ionescu^[13] 相同的等价锚定能[见式(22)]。

将式(18)~(19)代入式(6), 得到:

$$\theta(\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{\pi a}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n\pi\tilde{z}) \frac{1}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \cdot$$

$$\left[\frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \sin(2n\pi\tilde{x}) + \frac{\sin(2n\pi a)}{4n} \cos(2n\pi\tilde{x}) \right] \quad (25)$$

式(25)表明聚合物与基板表面之间的锚定会影响向列相指向矢的倾角分布。

另外, 式(18)~(21)给出单位周期的总自由能表达式:

$$F = \pi K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \frac{1}{1 + 2n\pi L_e/\lambda} \quad (26)$$

以及相应的总自由能密度:

$$F/\lambda = \pi K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi a)}{2n} \frac{1}{\lambda + 2n\omega L_e} \quad (27)$$

式(25)和式(27)可分别用来确定向列相指向矢的倾角分布以及系统的总自由能。

为了清晰地分析聚合物与基板表面之间的锚定效应, 通过数值计算将我们的结果与 Atherton^[14] 的结果进行对比讨论。在数值计算中, 选择参数 $K = 1.2 \times 10^{-11}$ N, $\lambda = 0.1 \mu\text{m}$, $a = 0.5$ 。

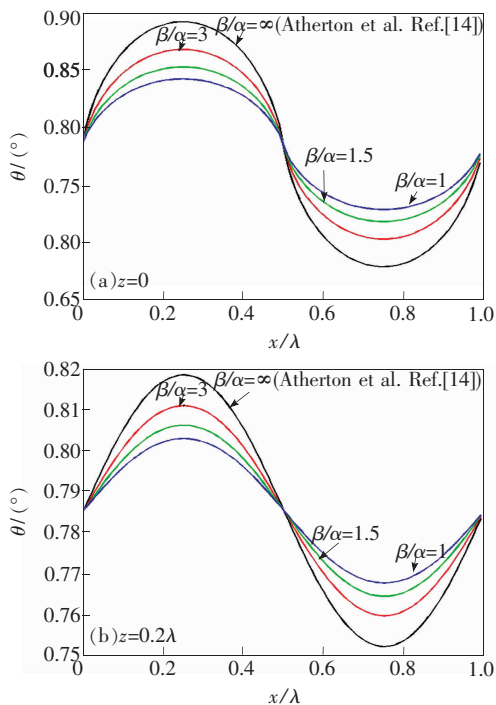


图 2 β 取不同值时向列相指向矢的倾角 θ 的分布曲线。(a) $z=0$; (b) $z=0.2\lambda$ 。

Fig. 2 Tilt angle profile of the nematic director for various β . (a) $z=0$; (b) $z=0.2\lambda$ 。

图 2 给出了 β 取不同值时, $z=0$ [图 2(a)]和 $z=0.2\lambda$ [图 2(b)]处指向矢倾角 θ 的分布曲线,

其中包含我们的结果以及 Atherton^[14]的结果。从图中可以看出, 聚合物与基板表面之间的锚定会影响向列指向矢的倾角分布。随锚定参数 β 增加, 我们的结果逐渐趋于 Atherton 的结果, 这在理论上是合理的; 并且, 聚合物和表面之间的锚定还会降低松弛距离。

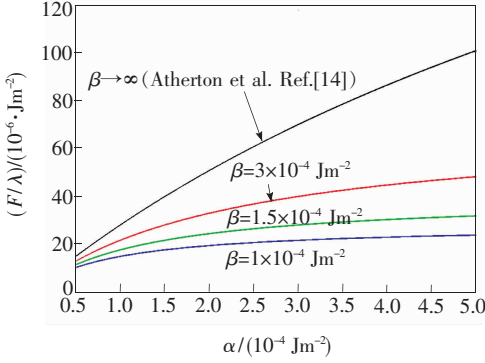


图 3 β 取不同值时总自由能密度 F/λ 随 α 的变化曲线

Fig. 3 The α dependence of the total free energy density F/λ for various β

图 3 给出了 β 取不同值时, 系统的总自由能密度随 α 的变化曲线。我们发现聚合物和表面之间的锚定会降低系统的总自由能。随着参数 β 增加, 我们的结果逐渐趋于 Atherton 的结果。

4 结 论

提出了纳米结构聚合物表面的一个简化模型: 由具有交替的沿面和垂面锚定的一维周期性条纹表面表征, 研究了向列相和取向层聚合物之间锚定以及聚合物与基板表面之间锚定对向列表面锚定的影响。我们的结果证实了郭海成等人^[8-10]的结论。通过假定两锚定区域的锚定强度相等, 并与 Atherton 等人^[14]的结果进行比较, 得到了与 Alexe-Ionescu^[13]相同的等价锚定能[见式(22)]。结果表明: 取向层聚合物与基板表面之间的锚定会影响向列相指向矢分布, 降低松弛距离以及系统的总自由能。

附录 A 各矩阵元素的表达式

根据计算得到的总自由能 $F(\theta_0, \theta'_0, p_n, q_n, p'_n, q'_n; n=1, 2, 3\cdots)$ 以及 $\frac{\partial F}{\partial \theta_0} = \frac{\partial F}{\partial \theta'_0} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_n} = \frac{\partial F}{\partial q_n} =$

$\frac{\partial F}{\partial p'_n} = \frac{\partial F}{\partial q'_n} = 0$, 可以得到

$$A_{11} = \frac{\lambda}{L_{aH}}(1-a) + \frac{\lambda}{L_{aV}}a \quad (\text{A. 1a})$$

$$A_{22} = \left[\frac{\lambda}{L_{aH}}(1-a) + \frac{\lambda}{L_{aV}}a \right] + \left[\frac{\lambda}{L_{\beta H}}(1-a) + \frac{\lambda}{L_{\beta V}}a \right] \quad (\text{A. 1b})$$

$$A_{12} = A_{21} = - \left[\frac{\lambda}{L_{aH}}(1-a) + \frac{\lambda}{L_{aV}}a \right] \quad (\text{A. 1c})$$

$$A_{1,4m-1} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) \frac{\sin^2(m\pi)}{m\pi} \quad (\text{A. 2a})$$

$$A_{1,4m} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) \frac{\sin(2m\pi)}{2m\pi} \quad (\text{A. 2b})$$

$$A_{1,4m+1} = A_{2,4m-1} = \left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) \frac{\sin^2(m\pi)}{m\pi} \quad (\text{A. 2c})$$

$$A_{1,4m+2} = A_{2,4m} = \left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) \frac{\sin(2m\pi)}{2m\pi} \quad (\text{A. 2d})$$

$$A_{2,4m+1} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \frac{\sin^2(m\pi)}{m\pi} \quad (\text{A. 2e})$$

$$A_{2,4m+2} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \frac{\sin(2m\pi)}{2m\pi} \quad (\text{A. 2f})$$

$$A_{4n-1,1} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{aH}} - \frac{2\lambda}{L_{aV}} \right) \frac{\sin^2(n\pi)}{n\pi} \quad (\text{A. 3a})$$

$$A_{4n-1,2} = A_{4n+1,1} = \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \frac{\sin^2(n\pi)}{n\pi} \quad (\text{A. 3b})$$

$$A_{4n,1} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \frac{\sin 2n\pi}{2n\pi} \quad (\text{A. 3c})$$

$$A_{4n,2} = A_{4n+2,1} = \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \frac{\sin(2n\pi)}{2n\pi} \quad (\text{A. 3d})$$

$$A_{4n+1,2} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \frac{\sin^2(n\pi)}{n\pi} \quad (\text{A. 3e})$$

$$A_{4n+2,2} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \frac{\sin(2n\pi)}{2n\pi} \quad (\text{A. 3f})$$

当 $n=m$ 时,

$$A_{4n-1,4n-1} = 4n\pi + \frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \quad (\text{A. 4a})$$

$$A_{4n,4n} = 4n\pi + \frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \quad (\text{A. 4b})$$

$$A_{4n+1,4n+1} = \frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\beta H}} \left(1 - a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \left(a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \quad (\text{A. 4c})$$

$$A_{4n+2,4n+2} = \frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\beta H}} \left(1 - a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \left(a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \quad (\text{A. 4d})$$

$$A_{4n-1,4n+1} = A_{4n+1,4n-1} = - \left[\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \right] \quad (\text{A. 4e})$$

$$A_{4n,4n+2} = A_{4n+2,4n} = - \left[\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} \left(1 - a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \left(a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \right] \quad (\text{A. 4f})$$

$$A_{4n-1,4n} = A_{4n-1,4n+2} = A_{4n,4n-1} = A_{4n,4n+1} = A_{4n+1,4n} = A_{4n+1,4n+2} = A_{4n+2,4n-1} = A_{4n+2,4n+1} = 0 \quad (\text{A. 4g})$$

当 $n \neq m$ 时,

$$A_{4n-1,4m-1} = \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi\alpha}{(2n+2m)\pi} - \frac{\sin(2n-2m)\pi\alpha}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5a})$$

$$A_{4n-1,4m} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi\alpha}{(n+m)\pi} + \frac{\sin^2(n-m)\pi\alpha}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5b})$$

$$A_{4n-1,4m+1} = A_{4n+1,4m-1} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi\alpha}{(2n+2m)\pi} - \frac{\sin(2n-2m)\pi\alpha}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5c})$$

$$A_{4n-1,4m+2} = A_{4n+1,4m} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi\alpha}{(n+m)\pi} + \frac{\sin^2(n-m)\pi\alpha}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5d})$$

$$A_{4n,4m-1} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi\alpha}{(n+m)\pi} - \frac{\sin^2(n-m)\pi\alpha}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5e})$$

$$A_{4n,4m} = - \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi\alpha}{(2n+2m)\pi} + \frac{\sin(2n-2m)\pi\alpha}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5f})$$

$$A_{4n,4m+1} = A_{4n+2,4m-1} = \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi\alpha}{(n+m)\pi} - \frac{\sin^2(n-m)\pi\alpha}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5g})$$

$$A_{4n,4m+2} = A_{4n+2,4m} = \left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi\alpha}{(2n+2m)\pi} + \frac{\sin(2n-2m)\pi\alpha}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5h})$$

$$A_{4n+1,4m+1} = \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi\alpha}{(2n+2m)\pi} - \frac{\sin(2n-2m)\pi\alpha}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5i})$$

$$A_{4n+1,4m+2} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi a}{(n+m)\pi} + \frac{\sin^2(n-m)\pi a}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5j})$$

$$A_{4n+2,4m+1} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi a}{(n+m)\pi} - \frac{\sin^2(n-m)\pi a}{(n-m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5k})$$

$$A_{4n+2,4m+2} = - \left[\left(\frac{2\lambda}{L_{\alpha H}} - \frac{2\lambda}{L_{\alpha V}} \right) + \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \right] \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi a}{(2n+2m)\pi} + \frac{\sin(2n-2m)\pi a}{(2n-2m)\pi} \right] \quad (\text{A. 5l})$$

$$X_1 = \theta_0, X_2 = \theta_0', X_{4m-1} = p_m, X_{4m} = q_m, X_{4m+1} = p_m', X_{4m+2} = q_m' \quad (\text{A. 6})$$

$$B_1 = B_{4n-1} = B_{4n} = 0 \quad (\text{A. 7a})$$

$$B_2 = \left[\frac{\lambda}{L_{\beta H}}(1-a) + \frac{\lambda}{L_{\beta V}}a \right] \cdot \frac{\pi}{2}a - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{2\lambda}{L_{\beta V}} \right) \frac{\sin^2(n\pi)}{n^2\pi} \quad (\text{A. 7b})$$

$$B_{4n+1} = \left[\frac{\lambda}{L_{\beta H}} \left(1 - a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \left(a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \right] \frac{\sin^2(n\pi)}{n} + \sum_{m \neq n} \left(\frac{\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi a}{(2n+2m)\pi} - \frac{\sin(2n-2m)\pi a}{(2n-2m)\pi} \right] \frac{\sin^2(m\pi)}{m} - \quad (\text{A. 7c})$$

$$\sum_{m \neq n} \left(\frac{\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi a}{(n+m)\pi} + \frac{\sin^2(n-m)\pi a}{(n-m)\pi} \right] \frac{\sin(2m\pi)}{2m}$$

$$B_{4n+2} = \left[\frac{\lambda}{L_{\beta H}} \left(1 - a - \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) + \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \left(a + \frac{\sin(4n\pi)}{4n\pi} \right) \right] \frac{\sin(2n\pi)}{2n} - \sum_{m \neq n} \left(\frac{\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \right) \left[\frac{\sin(2n+2m)\pi a}{(2n+2m)\pi} + \frac{\sin(2n-2m)\pi a}{(2n-2m)\pi} \right] \frac{\sin(2m\pi)}{m} - \quad (\text{A. 7d})$$

$$\sum_{m \neq n} \left(\frac{\lambda}{L_{\beta H}} - \frac{\lambda}{L_{\beta V}} \right) \left[\frac{\sin^2(n+m)\pi a}{(n+m)\pi} - \frac{\sin^2(n-m)\pi a}{(n-m)\pi} \right] \frac{\sin^2(m\pi)}{m}$$

附录 B 各矩阵元素的简化表达式

假设 $L_{\alpha H} = L_{\alpha V} = L_{\alpha}$, $L_{\beta H} = L_{\beta V} = L_{\beta}$, 附录 A 中的表达式可以简化为

$$A_{11} = \frac{\lambda}{L_{\alpha}} \quad (\text{B. 1a})$$

$$A_{22} = \frac{\lambda}{L_{\alpha}} + \frac{\lambda}{L_{\beta}} \quad (\text{B. 1b})$$

$$A_{12} = A_{21} = -\frac{\lambda}{L_{\alpha}} \quad (\text{B. 1c})$$

$$A_{1,4m-1} = A_{1,4m} = A_{1,4m+1} = A_{1,4m+2} = A_{2,4m-1} = A_{2,4m} = A_{2,4m+1} = A_{2,4m+2} = 0 \quad (\text{B. 2})$$

$$A_{4n-1,1} = A_{4n,1} = A_{4n+1,1} = A_{4n+2,1} = A_{4n-1,2} = A_{4n,2} = A_{4n+1,2} = A_{4n+2,2} = 0 \quad (\text{B. 3})$$

当 $n = m$ 时,

$$A_{4n-1,4n-1} = A_{4n,4n} = 4n\pi + \frac{2\lambda}{L_{\alpha}} \quad (\text{B. 4a})$$

$$A_{4n+1,4n+1} = A_{4n+2,4n+2} = \frac{2\lambda}{L_{\alpha}} + \frac{2\lambda}{L_{\beta}} \quad (\text{B. 4b})$$

$$A_{4n-1,4n+1} = A_{4n+1,4n-1} = A_{4n,4n+2} = A_{4n+2,4n} = -\frac{2\lambda}{L_{\alpha}} \quad (\text{B. 4c})$$

$$A_{4n-1,4n} = A_{4n-1,4n+2} = A_{4n,4n-1} = A_{4n,4n+1} = A_{4n+1,4n} = A_{4n+1,4n+2} = A_{4n+2,4n-1} = A_{4n+2,4n+1} = 0 \quad (\text{B. 4d})$$

当 $n \neq m$ 时,

$$A_{4n-1,4m-1} = A_{4n-1,4m} = A_{4n-1,4m+1} = A_{4n-1,4m+2} = 0 \quad (\text{B. 5a})$$

$$A_{4n,4m-1} = A_{4n,4m} = A_{4n,4m+1} = A_{4n,4m+2} = 0 \quad (\text{B. 5b})$$

$$A_{4n+1,4m-1} = A_{4n+1,4m} = A_{4n+1,4m+1} = A_{4n+1,4m+2} = 0 \quad (\text{B. 5c})$$

$$A_{4n+2,4m-1} = A_{4n+2,4m} = A_{4n+2,4m+1} = A_{4n+2,4m+2} = 0 \quad (\text{B. 5d})$$

$$B_1 = B_{4n-1} = B_{4n} = 0 \quad (\text{B. 6a})$$

$$B_2 = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\pi}{2} a \quad (\text{B. 6b})$$

$$B_{4n+1} = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\sin^2(n\pi)}{n} \quad (\text{B. 6c})$$

$$B_{4n+2} = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\sin(2n\pi)}{2n} \quad (\text{B. 6d})$$

这样数学结构 $AX=B$ 可以简化为下列方程组,

$$\begin{cases} \frac{2\lambda}{L_a}(\theta_0 - \theta_0') = 0 \\ -\frac{\lambda}{L_a}\theta_0 + \left(\frac{\lambda}{L_a} + \frac{\lambda}{L_\beta}\right)\theta_0' = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\pi a}{2} \end{cases} \quad (\text{B. 7})$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2\lambda}{L_a} + 4\pi n\right)p_n - \frac{2\lambda}{L_a}p_n' = 0 \\ -\frac{2\lambda}{L_a}p_n + \left(\frac{2\lambda}{L_a} + \frac{2\lambda}{L_\beta}\right)p_n' = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\sin^2(n\pi)}{n} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{B. 8})$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2\lambda}{L_a} + 4\pi n\right)q_n - \frac{2\lambda}{L_a}q_n' = 0 \\ -\frac{2\lambda}{L_a}q_n + \left(\frac{2\lambda}{L_a} + \frac{2\lambda}{L_\beta}\right)q_n' = \frac{\lambda}{L_\beta} \frac{\sin(2n\pi)}{2n} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{B. 9})$$

参 考 文 献:

- [1] Jérôme B. Surface effects and anchoring in liquid crystals [J]. *Rep. Prog. Phys.*, 1991, 54:391-451.
- [2] Barbero G, Gabbasova Z, Osipov M A. Surface order transition in nematic liquid crystals [J]. *J. Phys. II France*, 1991, 1(6): 691-705.
- [3] Blinov L M, Chigrinov V G. *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials* [M]. New York: Springer-verlag, 1994.
- [4] Barbero G, Petrov A G. Nematic liquid crystal anchoring on Langmuir-Blodgett films: steric, biphilic, dielectric and flexoelectric aspects and instabilities [J]. *J. Phys.:Condens. Matter.*, 1994, (6):2291-2306.
- [5] Fazio V S U, Nannelli F, Komitov L. Sensitive methods for estimating the anchoring strength of nematic liquid crystals on Langmuir-Blodgett monolayers of fatty acids[J]. *Phys. Rev. E*, 2001, 63(6):061712(1-8).
- [6] 姜莹,孙振,房玉庆,等. 聚酰亚胺液晶垂直取向膜的表面取向分析[J]. *液晶与显示*, 2011, 26(1):9-12.
- [7] 郭春桔,夏森林,孙振,等. 侧链含稠环的新型聚酰亚胺液晶垂直取向剂的制备及表征[J]. *液晶与显示*, 2011, 27(1):8-13.
- [8] Yeung F S, Ho J Y, Li Y W, et al. Variable liquid crystal pretilt angles by nanostructured surfaces [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, 88(5):051910 (1-3).
- [9] Yeung F S, Xie F C, Wan J, et al. Liquid crystal pretilt angle control using nanotextured surfaces [J]. *J. Appl. Phys.*, 2006, 99 (12):124506 (1-4).
- [10] Yeung F S, Xie F C, Kwok H S, et al. High pretilt angles by nano-structured surfaces and their applications [C]// *36th Society for Information Display International Symposium*, Boston:SID, 2005: 1080-1083.
- [11] 郭海成. 纳米结构液晶取向膜 [J]. *液晶与显示*, 2012, 27(1):1-7.
- [12] Rapini A, Papoular M. Distortion d'une lamella nématique sous champ magnétique [J]. *J. Phys. (Paris) Colloq.*, 1969, 30:C4-C54.

- [13] Alexe-Ionescu A L, Barbero G, Komitov L. Anchoring of nematic liquid crystals on a thin polymeric film [J]. *Phys. Rev. E*, 2008, 77(5):051701(1-8).
- [14] Atherton T J, Sambles J R. Orientational transition in a nematic liquid crystal at a patterned surface [J]. *Phys. Rev. E*, 2006, 74(2):022701(1-4).
- [15] Kondrat S, Poniewierski A. Uniform and nonuniform textures of a nematic liquid crystal in contact with an inhomogeneous substrate[J]. *Phys. Rev. E*, 2001, 64:031709 (1-9).
- [16] Barbero G, Beica T, Alexe-Ionescu A L, *et al.* Anchoring energy and easy direction of non uniform surfaces [J]. *J. Phys. II France*, 1992, 2(11):2011-2024.
- [17] Schadt M, Seiberle H, Schuster A. Optical patterning of multi-domain liquid-crystal display with wide viewing angles [J]. *Nature*, 1996, 381(6579): 212-215.
- [18] Gupta V K, Abbot N L. Design of surfaces for patterned alignment of liquid crystals on planar and curved substrates [J]. *Science*, 1997, 276(5318):1533-1536.
- [19] Yokoyama H. Density-functional theory of surfacelike elasticity of nematic liquid crystals [J]. *Phys. Rev. E*, 1997, 55(3):2938-2957.
- [20] Pieranski P, Brochard F, Guyon E. Static and dynamic behavior of a nematic liquid crystal in a magnetic field-Part I :Static results [J]. *J. Phys. France*, 1972, 33(7):681-689.
- [21] Wahl J, Fisher F. Elastic and viscosity constants of nematic liquid crystals from a new optical method [J]. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 1973, 22(4):359-373.

欢迎订阅《液晶与显示》

《液晶与显示》是中国最早创办的液晶学科专业期刊,也是中国液晶学科和显示技术领域中的唯一的综合性专业学术期刊。它由中国科学院长春光学精密机械与物理研究所、中国物理学会液晶分会和中国光学光电子行业协会液晶分会主办,科学出版社出版。

《液晶与显示》以创新性、综合性、实用性为办刊特色,内容丰富,涵盖面广,信息量大,可读性强,既是启迪科技人员开拓创新思路的参考期刊,又是从事液晶和显示技术研究与开发的广大科技人员、大专院校师生及相关领域的科技工作者进行学术交流的论坛,也是图书、情报等部门必不可少的信息来源。

《液晶与显示》为双月刊,国内定价 40.00 元,全年 240.00 元,国内外公开发行。国内邮发代号:12-203,国内读者可在当地邮局订阅;也可通过“全国非邮发报刊联合发行部”订阅(E-mail:lhzd@public.tpt.tj.cn,网址:www.lhzd.com),本刊的代号为:5074。国外读者可通过中国国际图书贸易总公司订阅(电话:010-68433171),国外发行代号:4868BM。同时,《液晶与显示》编辑部将竭诚为广大读者服务,随时办理订阅。

地 址:长春市东南湖大路 3888 号 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所

《液晶与显示》编辑部

邮 编:130033

电 话:0431-86176059 0431-84613406

传 真:0431-84627061

E-mail: yjxs@ciomp.ac.cn; yjyxs@126.com

http://www.yjyxs.com