

文章编号:1007-2780(2019)09-0913-08

基于稀疏主成分分析的图像噪声估计方法

杨 华

(南充职业技术学院 电子信息工程系, 四川 南充 637000)

摘要:实现数字图像中噪声参数的精确估计对提高图像处理的质量有重要意义。对被高斯白噪声所污染的图像进行稀疏主成分分析时,其部分主成分的负载向量的均值与高斯白噪声标准差呈现一定的线性关系。基于此特征,本文提出了一种快速精确的图像噪声估计方法。在该方法中,通过对高斯白噪声污染图像添加多种已知标准差等级的新的高斯白噪声以产生多幅新图像,然后对每幅图像进行稀疏主成分分析,并求取多个主成分负载向量均值。最后,通过求解一个超定方程组实现图像高斯噪声标准差等级的精确估计。实验结果表明,本方法在低噪声($\delta_0 = 5$)到高噪声($\delta_0 = 70$)条件下均具有较高的估计精度和较强的鲁棒性,在实际工程中具有一定的实用价值。

关键词:稀疏主成分分析;高斯白噪声;图像噪声估计

中图分类号:TP394.1;TH691.9 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/YJYXS20193409.0913

Image noise estimation method based on sparse principal component analysis

YANG Hua

(Department of Electronic Information Engineering,
Nanchong Vocational and Technical College, Nanchong 637000, China)

Abstract: Realizing accurate estimation of noise parameters in digital images is of great significance for improving the quality of image processing. When the sparse principal component analysis is performed on the image contaminated by Gaussian white noise, the mean value of the load vector of some principal components and the standard deviation of Gaussian white noise show a certain linear relationship. Based on this feature, this paper proposes a fast and accurate image noise estimation method. In this method, a plurality of new Gaussian white noises of known standard deviation levels are added to the Gaussian white noise-contaminated image to generate a plurality of new images, and then each sample is subjected to sparse principal component analysis and mean of multiple principal component load vectors are obtained. Finally, an accurate estimation of the standard deviation of Gaussian noise is achieved by solving an over determined system of equations. The experiment results show that the method has high estimation accuracy under low noise ($\delta_0 = 5$) to high noise ($\delta_0 = 70$) conditions, and strong robustness is demonstrated. This method has certain practical value in practical engineering.

Key words: sparse principal component; Gaussian white noise; image noise estimation

收稿日期:2019-06-28;修订日期:2019-07-24.

* 通信联系人, E-mail: yanghua0626@163.com

1 引言

数字图像在成像、压缩和传输过程中经常会引入噪声,进而导致图像可视程度降低和信息的丢失^[1-2]。为了提高图像成像质量,图像处理领域的研究者提出了多种算法^[3-6]。对很多图像处理算法来说,在进行图像处理时,需预先估计图像噪声的分布模型和噪声的相关参数。

在大多数情况下,图像噪声服从高斯分布,为高斯白噪声。高斯白噪声一般为零均值。因此图像噪声估计参数一般为标准差或者方差。常用的噪声方差估计方法包括奇异值分解^[7]、主成分分析^[8]和小波变换^[9]等。图像噪声来源主要包括传感器噪声、电路失稳、传输过程中的压缩等^[10]。Li 等人^[11]认为图像中的信息可以被视为能量,被噪声污染之后的图像信息的部分损失可以归结为能量损失。稀疏主成分分析对数字图像这类矩阵数据的能量变化尤为敏感。在实验中,我们观察到噪声图像的高斯白噪声标准差等级与稀疏主成分分

析得到的部分主成分负载向量均值呈现较为良好的线性关系。基于该规律,本文提出了一种基于稀疏主成分分析的图像高斯噪声估计方法。该方法计算复杂度低且具有较强的鲁棒性和精确性。

2 稀疏主成分分析

2.1 主成分分析

主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)目的是在将每个样本属性值数量极大程度减小的前提下,保证原始数据矩阵的原始信息得以最大程度保留。

求解主成分(Principal Component)主要有两种方法^[12]。

第一种方法利用了协方差矩阵的特性:

设有包含 n 个样本、 p 个属性值的矩阵 $\mathbf{X}_{n \times p}$ 。

将矩阵进行中心化和标准化,标准化即每一个属性向量内的元素除以该向量内所有元素的标准差。其协方差矩阵为:

$$\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n b_i a_i & \sum_{i=1}^n c_i a_i & \cdots & \sum_{i=1}^n p_i a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 & \sum_{i=1}^n c_i b_i & \cdots & \sum_{i=1}^n p_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i c_i & \sum_{i=1}^n b_i c_i & \sum_{i=1}^n c_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n p_i c_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n a_i p_i & \sum_{i=1}^n b_i p_i & \sum_{i=1}^n c_i p_i & \cdots & \sum_{i=1}^n p_i^2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

可以发现,协方差矩阵的对角线依次排列各属性方差,非对角线上的元素是所有属性两两之间的协方差。因此使用主成分分析得到的降维后的低维矩阵的协方差矩阵必须满足这两个条件:

对角线元素尽可能大、非对角线元素为 0。

设使用 PCA 对矩阵 $\mathbf{X}$ 降维得到矩阵 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Z}$ 的协方差矩阵分别为 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$, $\mathbf{P}$ 为一组正交基,有 $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{P}$ 。则有:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{m} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \frac{1}{m} (\mathbf{X}\mathbf{P})^T (\mathbf{X}\mathbf{P}) = \frac{1}{m} \mathbf{P}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \left(\frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \right) \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}. \quad (2)$$

因此,优化目标变为寻找使得原始数据矩阵 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{C}$ 对角化且对角线元素从上到

下降序排列的矩阵 $\mathbf{P}$ 。由于协方差矩阵为实对称矩阵,在线性代数上,实对称矩阵有一系列极有实

用价值的性质^[13]。若某实对称矩阵大小为 p 行 p 列,则一定可以找到 p 个互相正交的单位特征向量,设这 p 个特征向量组成矩阵 E :

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_p),$$

则对协方差矩阵 C 有:

$$E^T C E = \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix}, \quad (3)$$

若将特征值向量按照降序排列,每个特征值对应的特征向量矩阵 E 也进行对应的重排。则式(3)得到的对角阵从上到下各元素的大小也为降序排列。

因此,主成分分析所求的 P 就是原始数据矩阵 X 的协方差矩阵 C 的特征向量 E 。按照特征值大小取前 K 个特征值对应的特征向量按列排序,构成 PCA 前 k 个主成分对应的负载矩阵 $\beta_{p \times k}$,前 K 个主成分为:

$$Z_{n \times k} = X_{n \times p} \beta_{p \times k}. \quad (4)$$

第二种方法是对 $X_{n \times p}$ 进行奇异值(Singular Value Decomposition, SVD)分解:

$$X = U D \beta^T, \quad (5)$$

$Z_{n \times k} = U D$ 为 X 通过主成分分析降维后得到的前 k 个主成分矩阵, $\beta_{p \times k}$ 为前 k 个主成分对应的负载矩阵, $D_{p \times p}$ 为对角阵,对角线元素为降序排列的原始矩阵的奇异值。

上述两种方法适用不同类型数据矩阵。若以数据矩阵的每一行代表一个样本,每一列代表一种属性,第一种方法适用于样本数量远大于属性数量的数据矩阵,第二种方法适用于样本数量远小于属性数量的矩阵。

各个主成分对原数据矩阵的解释程度不同,一般通过主成分的方差贡献率(也称方差解释率)来衡量其在原始数据矩阵中所占的比重。对方法一、二,主成分的方差贡献率分别使用式(6)、(7)计算,前 k 个主成分的累计方差贡献率分别使用式(8)、(9)计算。

$$\text{Var} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}, \quad (6)$$

式中, λ_i 为原始矩阵 $X_{n \times p}$ 的协方差矩阵的第 i 个特征值(按降序排列)。

$$\text{Var} = \frac{D_{ii}}{\sum_{i=1}^p D_{ii}}, \quad (7)$$

D_{ii} 为矩阵 D 对角线第 i 个元素。

$$\text{Accvar} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}, \quad (8)$$

$$\text{Accvar} = \sum_{i=1}^k \frac{D_{ii}}{\sum_{i=1}^p D_{ii}}. \quad (9)$$

2.2 稀疏主成分分析

稀疏主成分分析是在主成分分析的基础上,将主成分分析所得负载矩阵作为系数矩阵,与原始数据矩阵通过最小二乘法逼近主成分矩阵,同时引入 L_1 正则化和 L_2 正则化作为约束^[14]。如式(10)所示:

$$\hat{\beta}_i = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|Z_i - X\beta_i\|^2 + \lambda \|\beta_i\|^2 + \lambda_1 \|\beta_i\|_1, \quad (10)$$

其中, β_i 为第 i 个主成分 Z_i ($Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i}, \dots, Z_{ni})^T$) 对应的负载向量, $\frac{\hat{\beta}_i}{|\hat{\beta}_i|}$ 为求

得的稀疏负载向量, $X \frac{\hat{\beta}_i}{|\hat{\beta}_i|}$ 为第 i 个稀疏主成分。

L_1 正则化 $\lambda_1 \|\beta_i\|_1$ 用于保证所得主成分的负载矩阵的稀疏度。 L_2 正则化 $\lambda \|\beta_i\|^2$ 用于限定系数从而降低误差。

3 图像噪声估计方法

给定一个尺寸为 $M \times N$ 的灰度图像,设其通过稀疏主成分分析得到的稀疏负载矩阵为 $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$ 。其中 $\beta_i \in R^{M \times 1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 为一个稀疏主成分的负载向量。对稀疏负载矩阵中的每一个稀疏负载向量求取均值,得到 $\bar{\beta} = \{\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_N\} \in R^{1 \times N}$ 。

以图1所示的8幅尺寸均为 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的灰度图进行线性关系测试。对8幅图分别添加标准差 $\delta = 5, 10, 20, 30, \dots, 70$ 的高斯白噪声,使得每一幅图均对应生成8幅新的高斯白噪声图像。对噪声标准差等级 δ 使用多个稀疏负载向量均值的加权平均进行线性拟合,如式(11)所示。

$$\delta_i = \frac{\sum_{j=r_1}^{r_2} \omega_j \bar{\beta}_j}{r_2 - r_1 + 1} \alpha_i +$$

$$\epsilon_i, (r_1, r_2 \in [1, N], \omega_j \in [0, 1]), \quad (11)$$

式中, δ_i 代表第 i 幅噪声图像所对应的高斯白噪声标准差等级。使用式(11)反复迭代计算之后确定 $r_1=1, r_2=5, \omega_j=1 (j=1, 2, \dots, 5)$ 时拟合效果最好。此时式(11)可重写为式(12)。

$$\delta^i = \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_j}{5} \alpha_i + \epsilon_i. \quad (12)$$

此时各图的拟合结果如图 2 所示。

在实际应用中,对单个图像而言,因未知量过多,因此式(12)无法求出唯一收敛解。为解决此问题,本文采用构造超定方程组的方式求解单个图像的未知量。方法如下所述:

设原始图像的像素矩阵为 $\mathbf{X}_0$, 添加了未知标准差等级 δ_0 的高斯白噪声 n_0 之后得到的新图像为 $\mathbf{X}_0 + n_0 = Y_0$ 。对 $\mathbf{X}_0$ 和 Y_0 有:

$$D(Y_0) = D(\mathbf{X}_0 + n_0) = D(\mathbf{X}_0) + \delta_0^2. \quad (13)$$

然后分别对 Y_0 添加已知标准差等级 $\delta_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的高斯白噪声 $n_i (i=1, 2, \dots, N)$, 分别得

到 $Y_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。对 $Y_i (i=1, 2, \dots, N)$ 有:

$$D(Y_i) = D(\mathbf{X}_0 + n_0 + n_i) = D(\mathbf{X}_0) + \delta_0^2 + \delta_i^2, \quad (14)$$

则结合式(12)与(14)可得到:

$$\delta = \begin{bmatrix} \sqrt{\delta_0^2} \\ \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2} \\ \sqrt{\delta_0^2 + \delta_2^2} \\ \vdots \\ \sqrt{\delta_0^2 + \delta_N^2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_j}{5} \\ \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_{j,1}}{5} \\ \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_{j,2}}{5} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_{j,N}}{5} \end{bmatrix} + \epsilon, \quad (15)$$

式中, $\bar{\beta}_{j,i} (i=1, 2, \dots, N)$ 为 Y_0 添加了标准差等级为 $\delta_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的高斯白噪声 $n_i (i=1, 2, \dots,$

$$\delta_0 = \operatorname{argmax}_{st. \alpha > 0, \delta_0 > 0} \left[\sum_{i=1}^N (\sqrt{\delta_0^2 + \delta_i^2} - \alpha \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_{j,i}}{5} - \epsilon)^2 + (\sqrt{\delta_0^2} - \alpha \frac{\sum_{j=1}^5 \bar{\beta}_j}{5} - \epsilon)^2 \right], \quad (16)$$



图 1 用于线性关系测试的图像

Fig.1 Images for linear relationship testing

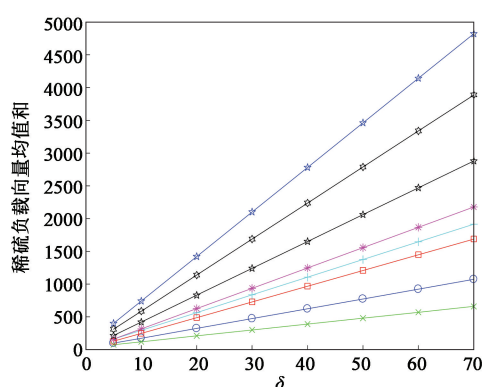


图2 参数最优时的拟合结果

Fig.2 Fitting results of the optimal parameters

N)之后生成的 $Y_i (i=1,2,\dots,N)$ 进行稀疏主成分分析所得到的第 j 个稀疏负载向量均值。

最后通过迭代求解式(16)的最优解,便可求得未知标准差等级 δ_0 的最优估计 $\hat{\delta}_0$ 。

4 实验结果和分析

4.1 灰度图像的噪声估计

Lena 标准灰度图像被用于进行噪声估计测试。文中所提出的噪声估计方法与文献[11,15]中提出的方法进行了比较。设 δ_0 为图像高斯白噪声的真实标准差等级, δ_1 为使用估计方法得出的高斯白噪声标准差等级的最优估计。实验结果如图3和表1所示。

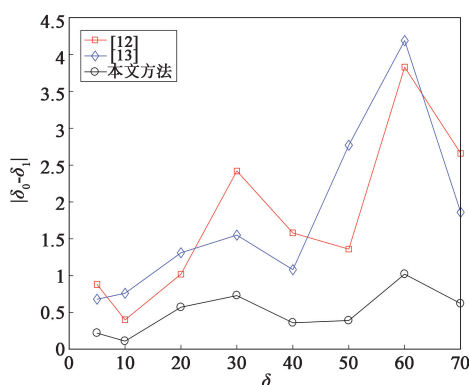


图3 不同噪声等级下3种噪声估计方法的噪声估计误差

Fig.3 Estimation error of three noise estimation methods under different noise levels

从图4和表1可以看出,相比于其他两种算法,本方法的精确度更高且更具有鲁棒性。

4.2 彩色图像的噪声估计

彩色图像包含 R、G、B 3 个像素矩阵。在实验中,分别对 R、G、B 3 个像素矩阵采用所提出的噪声估计方法进行噪声估计。实验所使用的 Lena 图像的 3 个通道如图4所示。与文献[11,15]的比较结果如图5和表2所示。

表1 不同噪声等级下3种噪声估计方法的估计结果

Tab.1 Estimation results of three noise estimation methods under different noise levels

δ_0	文献[11]	文献[15]	本文方法
5	4.12	4.32	4.78
10	9.60	9.24	10.11
20	21.02	21.31	20.57
30	32.42	31.55	30.73
40	41.58	41.08	40.36
50	51.36	52.77	50.39
60	63.83	64.19	61.02
70	72.66	71.86	70.62

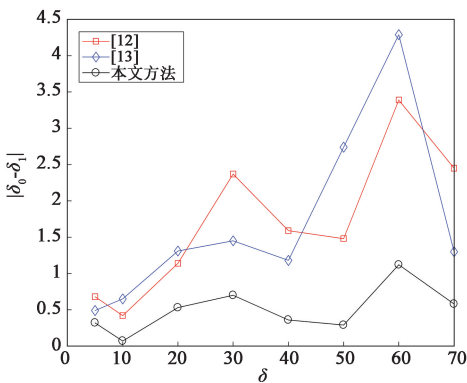
从图5和表2可以看出,本文方法在3个通道都达到了最高的精确度,且估计效果不受噪声等级影响。

(a) R 通道
(a) R channel(b) G 通道
(b) G channel

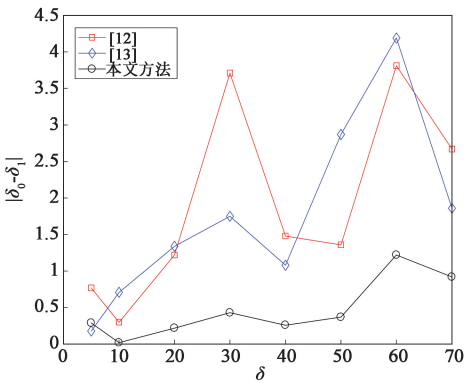


(c)B 通道
(c) B channel

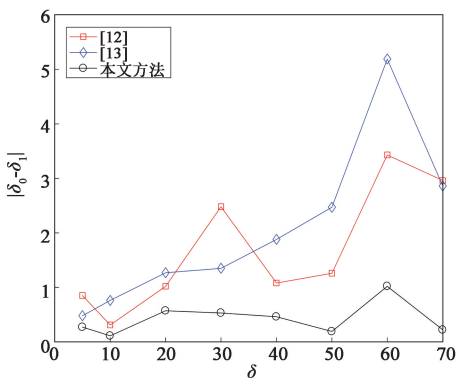
图 4 Lena 图像的 R、G、B 3 个通道
Fig.4 R, G, B channels of Lena image



(b) G channel
(b)G 通道



(a)R 通道
(a) R channel



(c)B 通道
(c) B channel

图 5 不同噪声等级下 3 种噪声估计方法在 3 个通道的噪声估计误差
Fig.5 Estimation error of three noise estimation methods in three channels under different noise levels

表 2 不同噪声等级下 3 种噪声估计方法在 3 个通道的估计结果

Tab.2 Estimation result of three noise estimation methods in three channels under different noise levels

δ_0	R 通道			G 通道			B 通道		
	文献[11]	文献[15]	本文方法	文献[11]	文献[15]	本文方法	文献[11]	文献[15]	本文方法
5	4.23	4.82	4.71	4.32	4.51	4.68	4.15	4.52	4.73
10	9.70	9.29	10.02	9.58	9.35	10.07	9.69	9.24	10.11
20	21.22	21.34	20.22	21.14	21.31	20.53	21.02	21.27	20.57
30	33.71	31.75	30.43	32.37	31.45	30.70	32.48	31.35	30.53
40	41.48	41.08	40.26	41.59	41.18	40.36	41.08	41.88	40.46
50	51.36	52.87	50.37	51.48	52.74	50.29	51.26	52.47	50.19
60	63.81	64.19	61.22	63.39	64.29	61.12	63.43	65.19	61.02
70	72.67	71.86	70.92	72.45	71.30	70.58	72.96	72.86	70.22

5 结 论

高斯噪声图像的噪声标准差等级与稀疏主成分分析得到的部分主成分负载向量均值呈现较为良好的线性关系,基于此特征,本文中提出了一种基于稀疏主成分分析的图像高斯噪声估计方法。在该方法中,经过实验确定了前5个稀疏负载向量

均值之和与噪声等级的线性度最优;同时通过在图像中依次添加已知噪声等级的高斯白噪声的方式构造超定方程组,在反复迭代之后求解出噪声等级的最优估计量。在标准图像 Lena 的灰度图和彩色图像三个通道的测试中,该方法展现出了相比于其他两种算法更高的精确度,在低噪声($\delta_0 = 5$)到高噪声($\delta_0 = 70$)条件下均具有较高的估计精度和较强的鲁棒性,具有一定的工程实用价值。

参 考 文 献:

- [1] KIMLYK M, UMYNASHKIN S. Image denoising using discrete wavelet transform and edge information [C]// *Proceedings of 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering*. Moscow: IEEE, 2018: 1823-1825.
- [2] XU J, ZHANG L, ZHANG D. External prior guided internal prior learning for real-world noisy image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, 27(6): 2996-3010.
- [3] CHANDNI C S, PUSHPAKUMARI R. Reduced hardware architecture of bilateral filter for real time image denoising [C]// *Proceedings of 2017 International Conference on Intelligent Computing, Instrumentation and Control Technologies*. Kannur: IEEE, 2017: 769-774.
- [4] WANG Z, HOU G J, PAN Z K, *et al.* Single image dehazing and denoising combining dark channel prior and variational models [J]. *IET Computer Vision*, 2018, 12(4): 393-402.
- [5] YUAN H Z, JIA J Z, ZHU Z X. SIPID: a deep learning framework for sinogram interpolation and image denoising in low-dose CT reconstruction [C]// *Proceedings of 2018 IEEE 15th International Symposium on Biomedical Imaging*. Washington: IEEE, 2018: 1521-1524.
- [6] 郭丙华, 岑志松. 小波去噪和神经网络相融合的超分辨率图像重建[J]. *激光杂志*, 2016, 37(2): 61-64.
GUO B H, CEN Z S. Super resolution image reconstruction based on wavelet denoising and neural network [J]. *Laser Journal*, 2016, 37(2): 61-64. (in Chinese)
- [7] 汪浩然, 夏克文, 牛文佳, 等. 结合分块噪声估计的字典学习图像去噪算法[J]. *计算机应用研究*, 2017, 34(10): 3153-3156, 3161.
WANG H R, XIA K W, NIU W J, *et al.* Image denoising algorithm combined with dictionary learning and blocked-based noise estimation [J]. *Application Research of Computers*, 2017, 34(10): 3153-3156, 3161. (in Chinese)
- [8] PYATYKH S, HESSER J, ZHENG L. Image noise level estimation by principal component analysis [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, 22(2): 687-699.
- [9] FAHMY M F, FAHMY O M. An enhanced denoising technique using dual tree complex wavelet transform [C]// *Proceedings of 2016 33rd National Radio Science Conference*. Aswan, Egypt: IEEE, 2016: 205-211.
- [10] BARBU T. Variational image denoising approach with diffusion porous media flow [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 2013: 856876.
- [11] ZORAN D, WEISS Y. Scale invariance and noise in natural images [C]// *Proceedings of 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision*. Kyoto, Japan: IEEE, 2009: 2209-2216.
- [12] BRO R, SMILDE A K. Principal component analysis [J]. *Analytical Methods*, 2014, 6(9): 2812-2831.
- [13] LEON S J. 线性代数[M]. 张文博, 张丽静, 译. 9 版. 北京: 机械工业出版社, 2015.
LEON S J. *Linear Algebra with Applications* [M]. ZHANG W B, ZHANG L J, trans. 9th ed. Beijing: Mechanical Industry Press, 2015. (in Chinese)
- [14] ZOU H, HASTIE T, TIBSHIRANI R. Sparse principal component analysis [J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2006, 15(2): 265-286.

- [15] LIU X H, MASAYUKI T, MASATOSHI O. Noise level estimation using weak textured patches of a single noisy image [C]//*Proceedings of 2012 IEEE 19th International Conference on Image Processing*. Orlando, FL, USA:IEEE, 2012:665-668.

作者简介:



杨 华(1976—),男,四川南充人,学士,讲师,2001 年于西华师范大学获得学士学位,主要从事计算机应用及算法、图像处理等方面的研究。E-mail:yanghua0626@163.com